BEITRÄGE ZUR THEORIE DER GANZEN FUNKTIONEN, DEREN ORDNUNG KLEINER ALS EINS IST

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Mathematik
der
Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Lutz Volkmann

Berlin 1973

BEITRÄGE ZUR THEORIE DER GANZEN FUNKTIONEN, DEREN ORDNUNG KLEINER ALS EINS IST

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Mathematik
der
Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Lutz Volkmann

Berlin 1973

1. Referent: Professor Dr. A. Dinghas

2. Referent: Professor Dr. H. Begehr

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Mai 1973

Tag der Promotion:

Ich danke meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. ALEXANDER DINGHAS, für seine vorzüglichen mathematischen Anregungen während meiner ganzen Studienzeit, aus denen heraus diese Dissertation entstanden ist, und für sein fortwährendes Wohlwollen, wodurch auch meine persönliche Entwicklung gefördert wurde.

INHALT

Seite

Einleitung 1

I. Zusammenhang zwischen Minimalbetrag
und Anzahl der Nullstellen 4

II. Zusammenhang zwischen Maximalbetrag
und Anzahl der Nullstellen 11

III. Zusammenhang zwischen Anzahlfunktion der
Nullstellen und Anzahl der Nullstellen . . . 16

Zitierte Literatur 19

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543105_0013

Einleitung

Sei $f(z)$ eine ganze Funktion. Es bezeichne $M(r)$ das Maximum und $m(r)$ das Minimum der absoluten Beträge von $f(z)$ auf dem Kreis $|z| = r$, $n(r,0)$ die Anzahl der Nullstellen dieser Funktion in der abgeschlossenen Kreisscheibe $|z| \leqq r$ und

$$N(r,0) = \int_0^r \frac{n(t,0) - n(0,0)}{t}\, dt + n(0,0) \log r$$

die Anzahlfunktion der Nullstellen. Die Ordnung einer ganzen Funktion $f(z)$ gibt der Ausdruck

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \log M(r)}{\log r}$$

an.

Für den Fall, daß die Ordnung $\lambda < 1$ ist, sind folgende Ungleichungen bekannt:

(A) $$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log m(r)}{\log M(r)} \geqq \cos \pi\lambda \ ,$$

(B) $$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{n(r,0)}{\log M(r)} \geqq \frac{\sin \pi\lambda}{\pi} \ ,$$

(C) $$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r,0)}{\log M(r)} \geqq \frac{\sin \pi\lambda}{\pi\lambda} \ ,$$

(D) $$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log m(r)}{N(r,0)} \geqq \pi\lambda \cot \pi\lambda \ .$$

Die ersten Beweise
von (A) gaben G. VALIRON 1913 in [9]*
und A. WIMAN 1915 in [14],
von (B) G. PÓLYA 1923 in [6],
von (C) A. WAHLUND 1929 in [13]
und G. VALIRON 1930 in [11]**,
von (D) G. VALIRON 1930 in [11]**.

Einen tieferen Einblick in das Verhalten des Quotienten aus $\log m(r)$ und $\log M(r)$ ganzer Funktionen der Ordnung $\lambda < 1$, als ihn die Ungleichung (A) liefert, gestatten die Ergebnisse von A. S. BESICOVITCH 1927 in [0]. Er zeigte in dieser Arbeit unter anderem, daß für eine ganze Funktion der Ordnung $\lambda < 1$ und jedes λ', mit $\lambda < \lambda' < 1$, die obere Dichte der Menge

$$E\left\{\log m(r) > \cos\pi\lambda' \log M(r)\right\}$$

größer oder gleich $1 - \frac{\lambda}{\lambda'}$ ist.

Im Zusammenhang mit den Ungleichungen (A), (B), (C) und (D) ist die Frage offen, ob der Ausdruck

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log m(r)}{n(r,0)}$$

einer ähnlichen Ungleichung genügt. Mit Hilfe einer Methode, mit der A. DENJOY 1931 in [2] einen elementaren Beweis von (A) gab, und die G. VALIRON 1935 in [12] benutzte, um (C) und (D) elementar zu beweisen, soll in dieser Arbeit für ganze Funktionen der Ordnung $\lambda < 1$ folgendes bewiesen werden:

$$\text{(E)}\quad \begin{aligned} &\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log m(r)}{n(r,0)} \geq \pi\cot\pi\lambda && (0 < \lambda < 1) \\ &\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log m(r)}{n(r,0)} = +\infty && (\lambda = 0) \quad . \end{aligned}$$

* vgl. [7], S. 78
** vgl. [12], S. 264

Anschließend daran wird ein neuer und kurzer Beweis der Ungleichung (B) gegeben. Der Beweis stützt sich auf eine Methode von A. EDREI und W.H.J. FUCHS [4], die in ihrer Arbeit schon darauf hingewiesen haben, daß es mit Hilfe ihrer Methode möglich ist, die Ungleichung (C) zu beweisen.

Am Schluß der Arbeit soll für ganze Funktionen die Ungleichung

$$\text{(F)} \qquad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r,0)}{N(r,0)} \geqq \rho$$

bewiesen werden, wobei

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log n(r,0)}{\log r}$$

bedeutet.

I. Zusammenhang zwischen Minimalbetrag und Anzahl der Nullstellen

Sei $f(z)$ eine ganze Funktion. Dann sollen

$$M(r) = \max_{|z| = r} |f(z)| ,$$

$$m(r) = \min_{|z| = r} |f(z)| ,$$

$n(r,0)$ die Anzahl der Nullstellen von $f(z)$ im Kreis $|z| \leqq r$ und

$$N(r,0) = \int_0^r \frac{n(t,0) - n(0,0)}{t} \, dt + n(0,0) \log r$$

bedeuten. Die Ordnung von $f(z)$ gibt der Ausdruck

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \log M(r)}{\log r}$$

an.

<u>Satz 1</u> Sei $f(z)$ eine ganze Funktion der Ordnung $\lambda < 1$, dann gilt

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log m(r)}{n(r,0)} \geqq \pi \cot \pi\lambda \qquad (0 < \lambda < 1)$$

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log m(r)}{n(r,0)} = +\infty \qquad (\lambda = 0) .$$

<u>Beweis</u> Beim Beweis dieses Satzes kann man sich auf nicht rationale ganze Funktionen beschränken, da im anderen Fall die Aussage des Satzes klar ist.

Es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(0) = 1$ angenommen werden, so daß $f(z)$ die Darstellung

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \; *$$

besitzt. Wenn $r_n = |z_n|$ ist, so gilt

$$\left| \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{r}{r_n}\right) \right| \leq \min_{|z| = r} \left| \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \right| .$$

Damit genügt es, den Satz für die Funktion

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_n}\right)$$

zu beweisen, die nach einem Satz von E. BOREL** von derselben Ordnung ist wie die Funktion $f(z)$. Es soll nun für jedes α mit $\lambda < \alpha < 1$ und $x > 0$ gezeigt werden, daß

$$\int_x^{\infty} [\log|g(-t)| - \pi \cot \pi\alpha \; n(t,0)] \frac{dt}{t^{1+\alpha}} > 0$$

gilt.
Man setze dazu

$$h(t) = \log|1 - t| - \pi \cot \pi\alpha \; \Delta(t),$$

* vgl. E.C. TITCHMARSH [8], S. 250
** vgl. A. DINGHAS [3], S. 355

wobei $\lambda < \alpha < 1$ und

$$\Delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 1 \\ 1 & \text{für } t \geqq 1 \end{cases}$$

gilt und betrachte das Integral

$$I(x) = \int_x^\infty \frac{h(t)}{t^{1+\alpha}}\, dt \; .$$

Mit Hilfe der elementar beweisbaren Formel

$$\int_0^\infty \frac{\log|1 - t|}{t^{1+\alpha}}\, dt = \frac{\pi}{\alpha} \cot \pi\alpha$$

erhält man

$$I(0) = I(\infty) = 0$$

und damit auch

$$I(x) = -\int_0^x \frac{h(t)}{t^{1+\alpha}}\, dt \; .$$

Nun gilt $h(t) < 0$ für $0 < t \leqq 1$ und $h(t)$ wächst für $t > 1$ monoton gegen unendlich. Damit besitzt $h(t)$ genau eine Nullstelle im Intervall $(0,\infty)$. Dies bedeutet aber, daß $I(x)$ bis zu dieser Nullstelle wächst und danach fällt, aber wegen $I(\infty) = 0$ immer positiv bleibt. Setzt man

$$L(x) = \frac{I(x)\ x^{\alpha}}{\log(1+x)} \qquad (x > 0)\ ,$$

so erhält man durch elementare Rechnungen

$$\lim_{x \to 0} L(x) = \frac{1}{1-\alpha}\ ,$$

$$\lim_{x \to \infty} L(x) = \frac{1}{\alpha}\ .$$

Das bedeutet aber, daß $L(x)$ ein positives Minimum $k(\alpha)$ besitzt, so daß

$$I(x) \geqq \frac{k(\alpha)\ \log(1+x)}{x^{\alpha}} > 0 \qquad (0 < x < \infty)$$

gilt. Also gilt für jedes positive x

$$\int_x^{\infty} [\log|1-t| - \pi\cot\pi\alpha\ \Delta(t)]\ \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \geqq \frac{k(\alpha)\ \log(1+x)}{x^{\alpha}} > 0\ .$$

Ersetzt man hier x durch $\frac{x}{r_n}$, so erhält man

$$(I.1)\quad \frac{1}{r_n^{\alpha}} \int_{\frac{x}{r_n}}^{\infty} [\log|1-t| - \pi\cot\pi\alpha\ \Delta(t)]\frac{dt}{t^{1+\alpha}} \geqq \frac{k(\alpha)\ \log(1+\frac{x}{r_n})}{x^{\alpha}} > 0\ .$$

Da nach dem schon erwähnten Satz von E. BOREL $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^{\alpha}}$ existiert und da

$$\int_0^{\infty} \frac{\log|1-t|}{t^{1+\alpha}}\, dt \quad , \quad \int_0^{\infty} \frac{|\log|1-t||}{t^{1+\alpha}}\, dt$$

existieren, existieren auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^{\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{\log|1-t|}{t^{1+\alpha}}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\log\left|1-\frac{t}{r_n}\right|}{t^{1+\alpha}}\, dt \ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^{\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{|\log|1-t||}{t^{1+\alpha}}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\left|\log\left|1-\frac{t}{r_n}\right|\right|}{t^{1+\alpha}}\, dt \ .$$

Setzt man

$$\alpha_n(t) = \frac{\log\left|1-\frac{t}{r_n}\right|}{t^{1+\alpha}} \ ,$$

so ist

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \int_x^{\infty} \alpha_n(t)dt - \int_x^{T} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t)\right]dt\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_T^{\infty} |\alpha_n(t)|dt \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} \int_T^{\infty} |\alpha_n(t)|\, dt + \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^{\infty} |\alpha_n(t)|\, dt < \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0) \ ,$$

falls T hinreichend groß ist. Das bedeutet aber

$$\text{(I.2)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{\log\left|1-\frac{t}{r_n}\right|}{t^{1+\alpha}}\, dt = \int_x^{\infty} \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \log\left|1-\frac{t}{r_n}\right|\Big] \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \quad .$$

Nun gilt noch

$$\text{(I.3)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^{\alpha}} \int_{\frac{x}{r_n}}^{\infty} \frac{\Delta(t)}{t^{1+\alpha}}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{\Delta(\frac{t}{r_n})}{t^{1+\alpha}}\, dt =$$

$$= \int_x^{\infty} \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \Delta\big(\frac{t}{r_n}\big)\Big] \frac{dt}{t^{1+\alpha}} = \int_x^{\infty} \frac{n(t,0)}{t^{1+\alpha}}\, dt \; .$$

Mit Hilfe von (I.2) und (I.3) ergibt sich nun aus (I.1)

$$\int_x^{\infty} [\log|g(-t)| - \pi\cot\pi\alpha\; n(t,0)] \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \geqq \frac{k(\alpha)\log g(x)}{x^{\alpha}} > 0 \; .$$

Somit muß es beliebig große r geben, so daß der Integrand positiv ausfällt. Das heißt aber

$$\log|g(-r)| > \pi\cot\pi\alpha\; n(r,0)$$

gilt für beliebig große r, woraus folgt, daß für alle $\varepsilon > 0$ beliebig große r existieren mit

$$\frac{\log|g(-r)|}{n(r,0)} > \pi\cot\pi\lambda - \varepsilon \; ,$$

womit der Satz bewiesen ist für $0 < \lambda < 1$. Mit $\alpha \to 0$ erhält man das Ergebnis für $\lambda = 0$.

<u>Bemerkung</u> Wenn f(z) zur Konvergenzklasse der Ordnung λ gehört, d.h., wenn

$$\int^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{1+\lambda}}\, dr$$

konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^{\lambda}}$.*

In diesem Fall ergibt sich aus dem Beweis des Satzes 1 die schärfere Aussage, daß es beliebig große r gibt, so daß

$$\frac{\log m(r)}{n(r,0)} > \pi \cot \pi\lambda$$

gilt.

<u>Folgerung</u> Da $\pi \cot \pi\lambda > 0$ ist für $\lambda < \frac{1}{2}$, kann man aus Satz 1 einen Satz von A. WIMAN ** folgern, der aussagt, daß für jede ganze Funktion der Ordnung $\lambda < \frac{1}{2}$ eine Folge von Kreisen existiert, auf denen das Minimum des absoluten Betrages der Funktion über alle Grenzen wächst.

* vgl. A. DINGHAS [3], S. 354

**vgl. L. BIEBERBACH [1], S. 269

II. Zusammenhang zwischen Maximalbetrag und Anzahl der Nullstellen

Hilfssatz Seien $h(t) \geqq 0$ und $g(t) > 0$ für $t \geqq t_o \geqq 0$ und $g(t)$ stetig und monoton wachsend. Außerdem sollen $h(t)$ und $\frac{h(t)}{g(t)}$ in jedem kompakten Intervall ihr Maximum annehmen und die Beziehungen

$$\text{(II.1)} \qquad \overline{\lim_{t \to \infty}} \; h(t) = \infty \quad ,$$

$$\text{(II.2)} \qquad \lim_{t \to \infty} \frac{h(t)}{g(t)} = 0$$

gelten. Dann existieren beliebig große r, so daß gleichzeitig die beiden Ungleichungen

$$\text{(II.3)} \qquad h(t) \leqq h(r) \qquad (t_o \leqq t \leqq r) \; ,$$

$$\text{(II.4)} \qquad \frac{h(t)}{g(t)} \leqq \frac{h(r)}{g(r)} \qquad (r \leqq t)$$

gelten.

Beweis Sei $r_o > t_o$ gegeben. Dann existiert nach (II.1), und weil $h(t)$ in jedem kompakten Intervall sein Maximum annimmt, ein $v_o > r_o$ mit

$$\text{(II.5)} \qquad h(v_o) = \max_{t_o \leqq t \leqq v_o} h(t) \; .$$

Da $\frac{h(t)}{g(t)} \geqq 0$ ist und in jedem kompakten Intervall sein Maximum annimmt, existiert nach (II.2) ein $v_1 \geqq v_o$ mit

$$\text{(II.6)} \qquad \frac{h(v_1)}{g(v_1)} = \max_{v_o \leqq t} \frac{h(t)}{g(t)} \quad .$$

Im Intervall $[t_o, v_1]$ existiert nun auch ein r mit

$$\text{(II.7)} \qquad h(r) = \max_{t_o \leqq t \leqq v_1} h(t) \ ,$$

wobei nach (II.5) $r \geqq v_o$ gelten muß. Für dieses r ist die Ungleichung (II.3) schon erfüllt. Man beachte nun, daß nach (II.7)

$$h(r) \geqq h(t) \qquad (r \leqq t \leqq v_1)$$

ist, und weil $g(t)$ monoton wachsend ist,

$$g(t) \geqq g(r) \qquad (r \leqq t)$$

gilt, womit sich

$$\frac{h(t)}{g(t)} \leqq \frac{h(r)}{g(r)} \qquad (r \leqq t \leqq v_1)$$

ergibt. Insbesondere gilt also

$$\frac{h(v_1)}{g(v_1)} \leqq \frac{h(r)}{g(r)} \quad .$$

Daraus folgt mit der Ungleichung (II.6)

$$\frac{h(t)}{g(t)} \leqq \frac{h(r)}{g(r)} \qquad (r \leqq t) \quad ,$$

womit für dieses r auch die Ungleichung (II.4) bewiesen ist. Da $r > r_o$ gilt und r_o beliebig groß gewählt werden kann, ist der Satz vollständig bewiesen.

<u>Satz 2</u> Sei f(z) eine ganze Funktion der Ordnung $\lambda < 1$, dann gilt

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{n(r,0)}{\log M(r)} \geqq \frac{\sin \pi\lambda}{\pi} \quad .$$

<u>Beweis</u> Im Fall $\lambda = 0$ ist nichts zu beweisen, also kann $\lambda > 0$ angenommen werden. In diesem Fall kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß f(z) die Darstellung

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_n}\right) \qquad (r_n > 0)$$

besitzt. Es gilt dann

$$\text{(II.8)} \qquad \log M(r) = \log f(r) = r \int_0^{\infty} \frac{n(t,0)}{t(t+r)}\, dt \; .^{*}$$

* vgl. E.C. TITCHMARSH [8], S. 271

Beachtet man nun die Beziehung

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log n(r,0)}{\log r} = \lambda \quad ,^{*}$$

so erkennt man, daß die Funktionen

$$h(t) = \frac{n(t,0)}{t^{\lambda-\varepsilon}} \quad , \quad g(t) = t^{2\varepsilon} \quad (0 < \varepsilon < \lambda \, , \; \lambda + \varepsilon < 1)$$

die Bedingungen der entsprechenden Funktionen des Hilfssatzes erfüllen. Damit erhält man für beliebig große r gleichzeitig die beiden Ungleichungen

$$\frac{n(t,0)}{t^{\lambda-\varepsilon}} \leqq \frac{n(r,0)}{r^{\lambda-\varepsilon}} \qquad (\tfrac{r}{2} \leqq t \leqq r) \quad ,$$

$$\frac{n(t,0)}{t^{\lambda+\varepsilon}} \leqq \frac{n(r,0)}{r^{\lambda+\varepsilon}} \qquad (r \leqq t) \; .$$

Damit erhält man aus (II.8) für beliebig große r

$$\frac{\log M(r)}{n(r,0)} \leqq r\int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{\lambda-\varepsilon} \frac{dt}{(t+r)t} + r\int_r^\infty \left(\frac{t}{r}\right)^{\lambda+\varepsilon} \frac{dt}{(t+r)t} \; .$$

Durch die Substitution $\frac{t}{r} = s$ folgt

* vgl. R. NEVANLINNA [5], S. 236

$$\frac{\log M(r)}{n(r,0)} \leqq \int_0^\infty \frac{s^{\lambda+\varepsilon-1}}{s+1}\, ds + \int_0^1 (s^{\lambda-\varepsilon-1} - s^{\lambda+\varepsilon-1}) \frac{ds}{s+1} .$$

Nun gilt

$$\int_0^1 (s^{\lambda-\varepsilon} - s^{\lambda+\varepsilon}) \frac{ds}{s(s+1)} = o(1) \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0 ,$$

und mit Hilfe des Residuensatzes erhält man

$$\int_0^\infty \frac{s^{\lambda+\varepsilon-1}}{s+1}\, ds = \frac{\pi}{\sin(\lambda+\varepsilon)\pi} .$$

Damit erhält man für beliebig große r

$$\frac{\log M(r)}{n(r,0)} \leqq \frac{\pi}{\sin(\lambda+\varepsilon)\pi} + o(1) .$$

Daraus folgt mit $\varepsilon \to 0$

$$\underline{\lim}_{r \to \infty} \frac{\log M(r)}{n(r,0)} \leqq \frac{\pi}{\sin \pi\lambda} ,$$

womit der Satz bewiesen ist.

III. Zusammenhang zwischen Anzahl der Nullstellen und Anzahlfunktion der Nullstellen

Hilfssatz Es sei $h(x)$ eine positive, reellwertige, fast überall stetige Funktion im Intervall (x_0,∞) $(x_0 > 0)$ und es gelte

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\log h(x)}{\log x} = \alpha \qquad (0 \leqq \alpha \leqq \infty),$$

dann gilt

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{h(x)}{H(x)} \geqq \alpha ,$$

wobei

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{h(t)}{t}\, dt$$

bedeutet.

Beweis Im Fall $\alpha = 0$ ist nichts zu beweisen, also sei $\alpha > 0$ und man nehme an, es gelte

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{h(x)}{H(x)} < \alpha .$$

Das bedeutet aber, daß eine Konstante k mit $0 < k < \alpha$ und ein $\delta = \delta(k) > x_0$ existieren, so daß $h(x) < k\, H(x)$ für alle x mit $x \geqq \delta$ gilt.

Nun gilt

$$H'(x) = \frac{h(x)}{x}$$

fast überall. Damit folgt

$$\frac{H'(x)}{H(x)} < \frac{h(x)}{x} \frac{k}{h(x)} = \frac{k}{x}$$

gilt fast überall für $x \geqq \delta$. Daher erhält man für alle genügend großen x

$$\log H(x) = \log H(\delta) + \int_{\delta}^{x} \frac{H'(t)}{H(t)} dt < \log H(\delta) + k \int_{\delta}^{x} \frac{dt}{t}$$

und damit

$$\log \frac{1}{k} + \log h(x) < \log H(x) < \log H(\delta) + k \log \frac{x}{\delta} .$$

Daraus folgt aber

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\log h(x)}{\log x} \leqq k < \alpha ,$$

was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.
Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

<u>Satz 3</u> Sei $f(z)$ eine ganze Funktion. Es gelte

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log n(r,0)}{\log r} = \rho ,$$

dann gilt

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{n(r,0)}{N(r,0)} \geqq \rho .$$

<u>Beweis</u> Wenn $\rho = 0$ ist, dann ist nichts zu beweisen. Wenn $\rho > 0$ gilt, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(0) \neq 0$ vorausgesetzt werden. In diesem Fall gilt

$$N(r,0) = \int_0^r \frac{n(t,0)}{t} \, dt .$$

Nun erfüllt die Funktion $n(r,0)$ die Bedingungen der entsprechenden Funktion $h(r)$ des Hilfssatzes und man erhält

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{n(r,0)}{N(r,0)} \geqq \rho .$$

<u>Folgerung</u> Wenn $f(z)$ eine ganze Funktion endlicher, nicht ganzzahliger Ordnung λ, oder von der Ordnung Null ist, dann gilt

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \log M(r)}{\log r} = \lambda = \rho = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log n(r,0)}{\log r} .$$ *

In diesem Fall folgt aus Satz 3

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{n(r,0)}{N(r,0)} \geqq \lambda .$$

* vgl. R. NEVANLINNA [5], S. 236

Zitierte Literatur

[0] BESICOVITCH, A.S.: On integral functions of order < 1. Math.Ann. 97 (1927), 677 - 695.

[1] BIEBERBACH, L.: Lehrbuch der Funktionentheorie. Band II, 2.Aufl., Leipzig und Berlin: Teubner 1931.

[2] DENJOY, A.: Sur un théorème de WIMAN. C.R. Acad. Sci. Paris 193 (1931), 828 - 830.

[3] DINGHAS, A.: Vorlesung über Funktionentheorie. Berlin - Göttingen - Heidelberg: Springer 1961.

[4] EDREI, A. und FUCHS, W.H.J.: The deficiencies of meromorphic functions of order less than one. Duke Math. J. 27 (1960), 233 - 249.

[5] NEVANLINNA, R.: Eindeutige analytische Funktionen. 2.Aufl., Berlin - Göttingen - Heidelberg: Springer 1953.

[6] PÓLYA, G.: Bermerkungen über unendliche Folgen und ganze Funktionen. Math. Ann. 88 (1923), 169 - 183.

[7] PÓLYA, G.: On the minimum modulus of integral functions of order less than unity. J. London Math. Soc. 1 (1926), 78 - 86.

[8] TITCHMARSH, E.C.: The theory of functions. 2.Aufl., Oxford Univ. Press 1939.

[9]* VALIRON, G.: Sur les fonctions entières d'ordre fini et d'ordre nul, et en particulier les fonctions à correspondance régulière. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (3) 5 (1913), 117 - 257.

[10] VALIRON, G.: Lectures on the general theory of integral functions. Toulouse: Édouard Privat 1923.

[11]* VALIRON, G.: Sur un théorème de M. WIMAN, Opuscula Mathematica A. WIMAN dedicata (1930), 1 - 12.

[12] VALIRON, G.: Sur le minimum du module des fonctions entières d'ordre inférieur à un. Mathematica (Cluj) 11 (1935), 264 - 269.

[13] WAHLUND, A.: Über einen Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage der ganzen Funktionen und seiner unteren Grenze nach dem JENSEN-schen Theoreme. Ark. Mat. 21 (1928/29), 1 - 34.

[14] WIMAN, A.: Über eine Eigenschaft der ganzen Funktionen von der Höhe Null. Math. Ann. 76 (1915), 197 - 211.

Die mit * gekennzeichnete Literatur hat dem Verfasser nicht vorgelegen.

Lebenslauf

Ich, Lutz Volkmann wurde am 1.1.1944 als Sohn des Bauingenieurs Günther Volkmann und seiner Ehefrau Edith in Liebenwalde (Kreis Niederbarnim) geboren.

Am 20.2.1963 bestand ich an der Heinrich-von-Kleist-Schule in Berlin meine Reifeprüfung und begann im Sommersemester desselben Jahres ein Studium in Mathematik an der Freien Universität Berlin. Dort bestand ich am 18.8.1971 die Diplomhauptprüfung in Mathematik. Seit dem 1.11.1971 bin ich Wissenschaftlicher Assistent am I. Mathematischen Institut der Freien Universtität Berlin.

In den Fächern Mathematik, Physik und Versicherungsmathematik nahm ich an Vorlesungen und Seminaren bei den folgenden Herren Professoren und Dozenten teil:

Dinghas, Engel, Förster, Grotemeyer, Knobloch, Lassen, Münzner, Päsler, Ringel, Rüßmann, Stöhr, Wünsche.

Seit dem 13.8.1965 bin ich verheiratet.
Am 25.12.1968 und 3.9.1972 wurden meine beiden Töchter geboren.